



وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران
معاونت آموزش متوسط



سؤالات آزمون های نهایی سال های ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ (شش دوره)

درس: هندسه (۳)
رشته: ریاضی و فیزیک

اداره آموزش
دوره دوم متوسطه نظری
مازندران

به صورت درس به درس
و همراه با
پاسخنامه تشریحی

با ما در کانال کام نهایی مازندران در شاد همراه باشید:

<http://shad.ir/motnazarimazand>



باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

معاونت آموزش متوسطه

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

نام درس: هندسه (۳)

پایه: دوازدهم

رشته: ریاضی و فیزیک

کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:
ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید				
۱	هندسه 3 (فصل 1) سوال ۳۵ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 9y = m + 1 \\ 4x + my = -4 \end{cases}$ جواب نداشته باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۲	اگر $3A = \begin{bmatrix} A & -5 \\ 1 & 4 A \end{bmatrix}$ باشد، مقدار A^{-1} را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۳	در تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۴	ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i > j \\ i + j & i \leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس A^{-1} را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر ماتریس مربعی وارون پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۶	جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید. اگر $A = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۷	جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید. اگر در ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس می نامند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

۸	اگر $A = \begin{bmatrix} A & 0 & 1 \\ 1 & A & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A $ را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۹	در تساوی ماتریسی $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۰	ماتریس $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $ kA = 625$ برقرار باشد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۱	ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۲	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $\left -\frac{1}{2}A^6 \right $ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۳	با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $(5A)^{-1} = \frac{1}{5}A^{-1}$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۵	ماتریس $(B^2 + 2I)$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است.)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۶	اگر $B = [b_{ij}]_{r \times r}$ ، $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i = j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۷	اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد مقادیر m و n را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۱۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A $ را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۱۹	در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست - نادرست)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۰	اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ را بیابید. (۱ ماتریس همانی مرتبه دو است.)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۱	اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۲	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند: (الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (ب) ماتریس B^T را محاسبه کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (۱ ماتریس همانی مرتبه دو است.)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۴	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۵	دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۲۶	ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد: (الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۲۷	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۲۸	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید. - اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 5$ باشد آنگاه $2A = 40$ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۲۹	عبارت زیر را کامل کنید. - اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۰	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشند، حاصل $2y + x - z$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۱	اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $A = -2$، حاصل $A + A^{-1} ^3$ را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۲	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۳	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} j-1 & i > j \\ i^2 - j & i = j \\ 1-i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض اند. (الف) حاصل $A \times B$ را به دست آورید. (ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۴	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^T - A = I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I - A)$ است. (ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O, 2r)$ است. (پ) بردار $\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$، یک بردار یکه است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -3 & & 0 \\ & 2k-1 & 2 \end{bmatrix}$، مقدار k برابر است. (ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل است. (پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\frac{m}{4} = \frac{9}{m} \neq \frac{m+1}{-4} \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ m=-6 \end{cases} \text{ (ص ۲۶ و ۳۱) هر دو جواب قابل قبول}$$

۱

$$|3A| = 4|A|^2 + 5 \Rightarrow 4|A|^2 - 9|A| + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=1 \\ |A|=\frac{5}{4} \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{4}{5} \end{cases} \text{ (ص ۳۰ و ۳۱)}$$

۲

$$\begin{bmatrix} x-2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \text{ (ص ۱۷)}$$

۳

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -1$$

۴

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4-3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ (ص ۲۱ و ۲۳)}$$

۵ نادرست (ص ۲۳)

۶ -۱ (ص ۲۸)

۷ اسکالر (ص ۱۲)

$$|A| = |A|(|A|-2) + 1(2) \Rightarrow |A|^2 - 3|A| + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=1 \\ |A|=2 \end{cases} \text{ (ص ۲۸ و ۳۰)}$$

۸

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$$

۹

(ص ۲۵)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

۱۰

$$k|kA| = k(k^3|A|) = k^4 \times 1 = 625 \Rightarrow k = \pm 5 \text{ (ص ۳۱)}$$

$$x=2, y=-1 \text{ (ص ۱۳)}$$

۱۱

$$|A|=2, \left| -\frac{1}{2}A^2 \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 |A|^2 = -2 \text{ (ص ۲۸ و ۳۱)}$$

۱۲

$$(A-3I)^2 = (A-3I)(A-3I) = A^2 - 3AI - 3IA + 9I^2 \xrightarrow[A^2=I]{AI=IA=A} A^2 - 6A + 9I$$

۱۳

(ص ۱۹ و ۳۱)

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۳ و ۳۱})$$

۱۴

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Delta A)^{-1} = \frac{1}{-50} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

$$(B^T + 2I) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 7 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۰ و ۱۹})$$

۱۵

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۱})$$

۱۶

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2n = m = 2 \quad (\text{ص ۱۲})$$

۱۷

$$|A| = 2 \quad (\text{ص ۲۹ و ۳۱})$$

۱۸

$$||A| A| = |A|^T |A| = |A|^2 = 16$$

۱۹ نادرست (ص ۲۶)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - 2I| = 2 \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۳})$$

۲۰

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \xrightarrow{AB=BA} A^T - 2AB + B^T$$

(ص ۲۱)

۲۱

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

ب) $B^T = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۱})$

۲۲

$$\begin{cases} m + 1 = 0 \\ 2n + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۱ و ۱۹})$$

۲۳

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{ص ۱۳})$$

۲۴

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$X = A^{-1} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x = 1, y = 2 \quad (\text{ص ۲۴})$$

۲۵

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۱ و ۲۸})$$

۲۶

$$\text{ب) } |B| = 3^9$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2\alpha \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \\ b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \quad (\text{ص ۲۱})$$

۲۷

۲۸ درست (ص ۳۱)

۲۹ دو (ص ۱۲)

$$z = -3 \quad (\text{ص ۲۰})$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow x^2 - 2y + z = -1$$

۳۰

$$|2A| + |A^{-1}|^3 = 2^3 |A| + \frac{1}{|A|^3} = 8(-2) + \frac{1}{-8} = \frac{-129}{8} \quad (\text{ص ۳۱})$$

۳۱

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۴})$$

۳۲

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & -1 \\ \cdot & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ص ۲۱ و ۲۸})$$

۳۳

$$\text{الف) } A \times B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & -4 & 3 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|B| = (-1 + 1 - 8) - (-2 - 2 + 2) = -6$$

پ) درست (ص ۷۵)

ب) درست (ص ۳۹)

۳۴ الف) نادرست (ص ۲۲)

$$\text{الف) } k = \frac{1}{2} \quad (\text{ص ۱۲}) \quad ۳۵$$

ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)

پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران



باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

نام درس: هندسه (۳)

معاونت آموزش متوسطه

پایه: دوازدهم

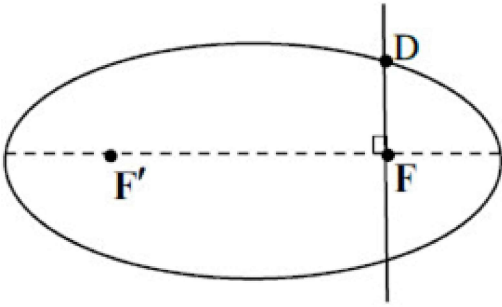
اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

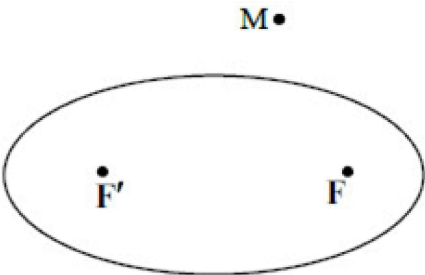
رشته: ریاضی و فیزیک

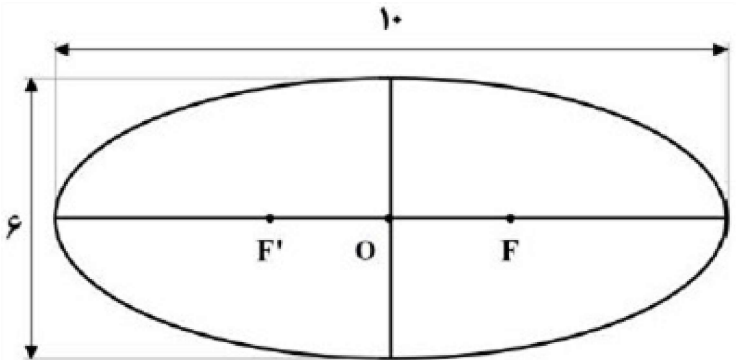
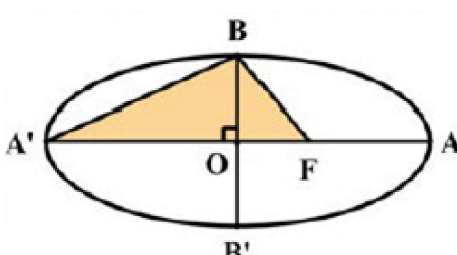
کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

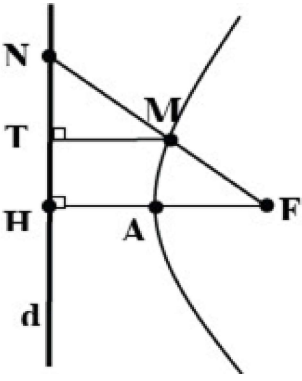
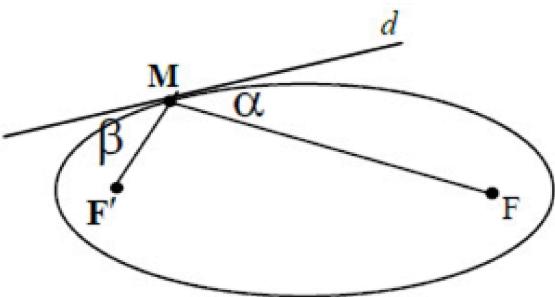
نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:
ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید				
۱	هندسه ۳ (فصل ۲) سوال ۵۳ در شکل مقابل، نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $MF' = NF'$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۲	معادله سهمی با کانون $F(1, 2)$ و خط هادی $x = -3$ را بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۳	در یک بیضی با کانون‌های F و F'، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه $\widehat{BF'F}$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۴	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه حل) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و روی خط $3x + 4y + 6 = 0$ وترى به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				

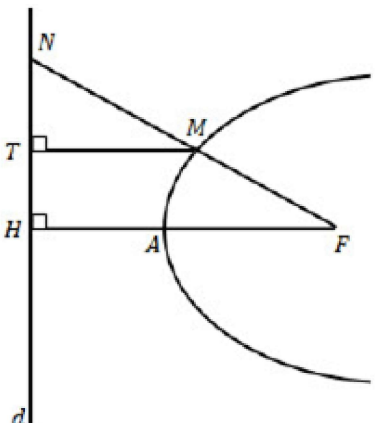
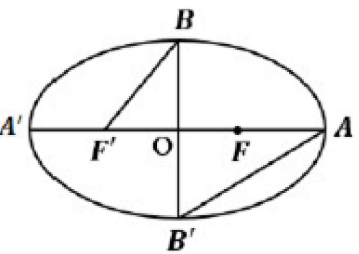
۶	نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۸	جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید. اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل یک است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۹	اگر اندازه گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (با ارائه راه‌حل)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۰	سهمی با رأس $A(1, 2)$ و کانون $F(1, -2)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۱	در شکل روبه‌رو نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد، به طوری که $MF = 8$ و $MF' = 6$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{7}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۲	در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۳	مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$ بر دایره $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ مماس بیرون باشد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۴	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۱, ۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x = -۳$ مماس باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۶	مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، آن زاویه است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۷	مختصات نقاط برخورد سهمی $y^2 + ۷x + ۵ = ۰$ و دایره $x^2 + y^2 = ۲۵$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۸	معادله سهمی را بنویسید که $F(-۳, ۲)$ مختصات کانون و معادله خط هادی آن $x = ۱$ باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۹	بیضی با قطر بزرگ $۲a$ ، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید: $DF = \frac{b^2}{a}$  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۰	در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(۴, ۰)$ و $F'(-۲, ۰)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه $P(۱, m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۱	در دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = ۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - ۴c}}{۲}$ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۲	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۲, -۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x - ۴y + ۱۰ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا کند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۲۳	مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ و شعاع است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۴	هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحه P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحه P و سطح ایجاد شده بیضی است. (درست - نادرست) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۵	الف) معادله سهمی را بنویسید که $A(2, 3)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = 3$ باشد. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید. پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۶	اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۷	اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۸	وضعیت خط $x + y = 1$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۹	حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$ معادله یک دایره باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۳۰	دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۳۱	سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱
۳۲	اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱

	معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است. الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید. ب) آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	۳۳
	در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	۳۴
	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(1, 4)$ و بر خط $3x + 4y = -1$ مماس باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۳۵
	اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد: الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است) ب) مساحت مثلث هاشورخورده $(\triangle BFA')$ چقدر است؟  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۳۶
	کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟ ☐ ۱ $(0, 0)$ ☐ ۲ $(1, 0)$ ☐ ۳ $(0, -1)$ ☐ ۴ $(-1, 0)$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۳۷
	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. - خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۳۸

	در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۳۹
	الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۰
	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است، الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون‌ها (F', F)، مختصات دوسر قطر بزرگ (A', A) و دوسر قطر کوچک (B', B) را به دست آورید. پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۱
	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(1, -1)$ و بر خط $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۲
	نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۳
	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید. - در شکل روبرو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $\widehat{F'MF}$ باشد آنگاه اندازه زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است.  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۴
	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید. - اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱	۴۵

۴۶	عبارت زیر را کامل کنید. - نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۴۷	عبارت زیر را کامل کنید. - اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به نزدیکتر می‌شود. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۴۸	در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M بر MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۴۹	در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۵۰	وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ را تعیین کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۵۱	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و با دایره $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ مماس داخل باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۵۲	نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۳ سانتیمتر و از d به فاصله ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۵۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

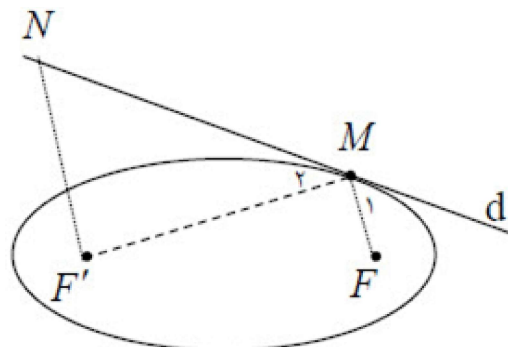
الف) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^T - A = I$ باشد، وارون ماتریس A ، برابر $(I - A)$ است.
 ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O, \sqrt{2}r)$ است.

پ) بردار $\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ، یک بردار یکه است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

- ۱) مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاهترین مسیر، زاویه‌های $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ از طرفی: $NF' \parallel MF$ و d مورب، در نتیجه $\widehat{N} = \widehat{M}_1$ نتیجه می‌شود $\widehat{N} = \widehat{M}_2$ مثلث MNF' متساوی‌الساقین است. یعنی $MF' = NF'$ (ص ۵۷)



۲) $F(\alpha + a, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$ (ص ۵۲ و ۵۸)

$$\left. \begin{matrix} x = \alpha - a \\ x = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha - a = -3 \xrightarrow{\alpha + a = 1} \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$(y - 2)^2 = 1(x + 1)$$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.

۳) $BB' = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow 2b = \frac{1}{2}(2a) \Rightarrow a = 2b$

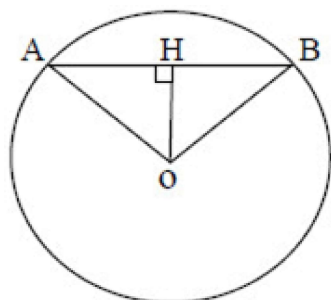
$$\cos F'BO = \frac{BO}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow F'BO = 60^\circ \Rightarrow F'BF = 120^\circ$$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از تانژانت زاویه $F'BO$ نمره لحاظ گردد. (ص ۵۸)

۴) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow O(1, -2), R = 1$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow O'(-1, -2), R' = 2, d = OO' = \sqrt{17}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند. $3 < \sqrt{17} < 5$ (ص ۴۶)



$$OH = \frac{|2(0) + 4(1) + 6|}{\sqrt{1 + 16}} = 2$$

$$AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = \sqrt{5} \Rightarrow R = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

۵) $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \Rightarrow (0, 4) \\ y = -2 \Rightarrow (0, -2) \end{cases}$ (ص ۴۴)

- ۶ مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط AB است.
مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط CD است.
محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.
حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب. (ص ۳۹)

۷ درست (ص ۵۶)

۸ بیضی (ص ۳۵)

۹ نصف می‌شود. (ص ۵۹)

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^2}{4h}}{\frac{b^2}{4h}} = \frac{1}{2}$$

- ۱۰ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.
فاصله کانونی سهمی برابر با $a = AF = 4$ است.
معادله آن برابر است با: $(x - 1)^2 = -16(y - 2)$
معادله خط هادی سهمی $y = 6$ است. (ص ۵۸)

۱۱ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

$$MF + MF' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{7} \xrightarrow{a=7} c = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 4\sqrt{3} \quad (\text{ص ۵۸})$$

۱۲ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$$AF + AF' = 2a = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF'} AF = BF'$$

دو مثلث AFB و $BF'F'$ بنا به حالت $(AF = BF', AF' = BF, FF' = FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند،
نتیجه دو زاویه $\widehat{AFF'} = \widehat{BFF'}$ ، مثلث MFF' متساوی‌الساقین است و $MF = MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط FF' (قطر کوچک بیضی) است.

۱۳

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Rightarrow O'(-1, 1), r' = \sqrt{2}$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - c \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2 - c}$$

$$OO' = 2\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2 - c} \Rightarrow c = 0 \quad (\text{ص ۴۳})$$

۱۴

$$OH = \frac{|1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, OH = R, (x - 1)^2 + y^2 = 16$$

روش اول:

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره (ص ۴۳)

۱۵ نادرست (ص ۵۱)

۱۶ نیمساز (ص ۳۹)

$$\begin{cases} y^2 + 4x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-4x - 5) = 25 \Rightarrow x^2 - 4x - 30 = 0$$

۱۷

$$x = -3, x = 10 \text{ (ص ۵۸)}$$

$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (-3, 4), (-3, -4) \\ x = 10 \Rightarrow y^2 = -75 \end{cases}$$

۱۸ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

$$\begin{aligned} a = AF = 2 \text{ در این سهمی } A(-1, 2), \\ (y - 2)^2 = -8(x + 1) \end{aligned}$$

معادله آن برابر است با:

(ص ۵۸)

$$DF + DF' = 2a$$

۱۹ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورت داریم:

$$DF^2 + FF'^2 = DF'^2 \Rightarrow DF^2 + (2c)^2 = (2a - DF)^2$$

$$DF = \frac{a^2 - c^2}{a} \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} DF = \frac{b^2}{a}$$

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow \sqrt{9 + m^2} + \sqrt{9 + m^2} = 10 \Rightarrow m = \pm 4 \text{ (ص ۴۸)}$$

۲۰

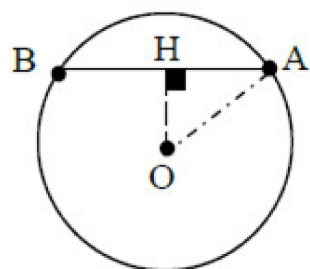
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

۲۱

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

(ص ۴۱)

۲۲ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$AH = \frac{1}{2}AB = 3$$

$$OH = \frac{|3(2) - 4(-1) + 10|}{\sqrt{9 + 16}} = 4$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25, (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

۲۳ ۵ (ص ۳۹)

۲۴ نادرست (ص ۳۹)

۲۵ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی $a = 1$ و معادله آن برابر است با:

$$(y - 3)^2 = -4(x - 2)$$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-1 + 2, 3) = (1, 3)$

پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}, \left(\frac{-1}{4}, 0 \right) \quad (\text{ص ۵۸ و ۵۴})$$

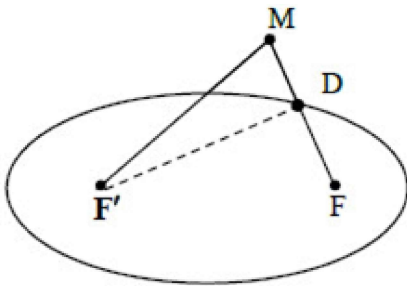
$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=1} c = 3 \Rightarrow AF = a - c = 2 \quad (\text{ص ۴۹})$$

۲۶

۲۷ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف بیضی:

$$DF + DF' = 2a$$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF داریم:



$$\begin{aligned} MD + MF' &> DF' \xrightarrow{+DF} \\ DF + MD + MF' &> DF + DF' \\ \Rightarrow MF + MF' &> 2a \end{aligned}$$

(ص ۴۷)

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4, O = (1, 1), r = 2, d = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۸

$$d < r$$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 16 + 36 > 4a \Rightarrow a < 13 \quad (\text{ص ۴۶})$$

۲۹

۳۰ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمود منصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مساله است.

الف - اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)

۳۱ درست (ص ۵۱)

۳۲ بیضی (ص ۳۵)

$$\text{الف) } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$$

۳۳

$$(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0 \quad (\text{ب) خیر زیرا:})$$

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c=4 \Rightarrow FF' = 8$$

۳۴

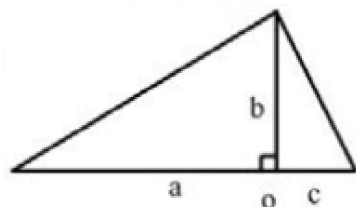
$$r = \frac{|3 \times 1 + 4(4) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$$

۳۵

الف) $\begin{matrix} a=5 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c=3 \Rightarrow A'F = 8$

۳۶

ب)



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5 + 3) \times 4 = 16$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$O \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right., R = \sqrt{1^2 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

۲ (گزینه ۲) $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2 \Rightarrow OA = R$

۳۸
 $\frac{3}{4}$

روش اول: ۳۹

بنا به تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی الساقین است.

از طرفی بنا به خطوط موازی $MT \parallel FH$ و مورب FT نتیجه می شود $MTF = TFH$ (۲)

از ۱ و ۲ نتیجه می شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH} \quad (\text{ص } ۵۸)$$

روش دوم:

$MT \parallel FH$ با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left. \begin{aligned} \frac{NM}{MF} &= \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} &= \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

الف) معادله متعارف سهمی $(x-1)^2 = 8(y-1)$ و فاصله کانونی $a=2$
ب) رأس سهمی $(1, 1)$ معادله خط هادی $x = -1$ و مختصات کانون آن $(3, 1)$ (ص ۵۵)

۴۰

$$\text{الف) } \begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

ب) $A(5, 0), A'(-5, 0)$

$F(4, 0), F'(-4, 0)$

$B(0, 3), B'(0, -3)$

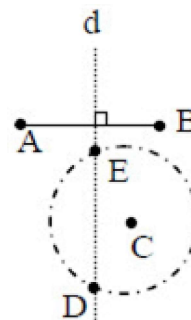
پ) رسم بیضی (ص ۴۹)

$$d = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

(ص ۴۳) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف d و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)
ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.
پ) در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۴۴) نادرست، $\alpha = \beta = 65^\circ$ (ص ۵۰)

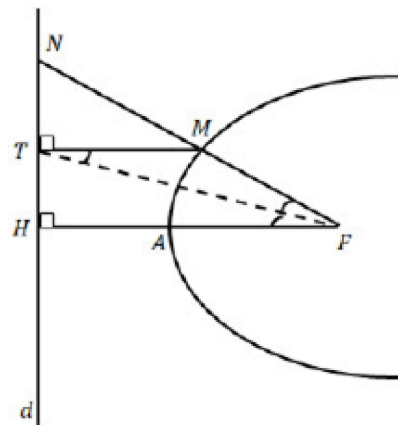
۴۵) درست (ص ۳۵)

۴۶) داخل (ص ۴۶)

۴۷) دایره (ص ۴۹)

۴۸ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است پس $\widehat{MFT} = \widehat{MFT}$ از طرفی $MT \parallel FH$ و FT خط مورب می باشد پس بنابر قضیه خطوط موازی و مورب $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$ از دو رابطه اخیر نتیجه می شود که TF نیمساز زاویه $\widehat{NFH}$ می باشد.
با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{\sqrt{FA}} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{\sqrt{NT}}{TH} \quad (\text{ص } ۵۸)$$



$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c}}{a} \quad (\text{ص } ۴۸)$$

$$\frac{S_{\triangle OBF'}}{\frac{1}{\sqrt{c}} OB \times OF'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{c}} bc}{\frac{1}{\sqrt{c}} ba} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c}}{a}$$

روش اول: $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$ (ص ۴۵)

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 - 2(3 - x) - 3 = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

دلتای معادله اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع اند.

روش دوم: $x^2 + y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow O(0, 1), r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 12} = 2$

$$OH = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} < 2$$

پس خط و دایره متقاطعند.

(ص ۴۴) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \Rightarrow O'(2, 3), r' = 4$

$$d = OO' = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8}$$

$$|r - r'| = d \Rightarrow |r - 4| = \sqrt{8} \Rightarrow r = 4 \pm \sqrt{8}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (4 \pm \sqrt{8})^2$$

۵۲

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم.
 اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.
 اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.
 اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)

۵۳

پ) درست (ص ۷۵)

ب) درست (ص ۳۹)

الف) نادرست (ص ۲۲)

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴



باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

معاونت آموزش متوسطه

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

نام درس: هندسه (۳)

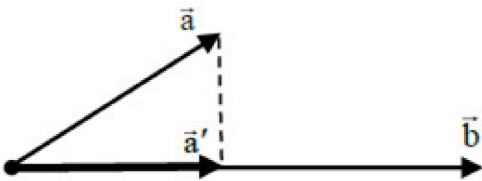
پایه: دوازدهم

رشته: ریاضی و فیزیک

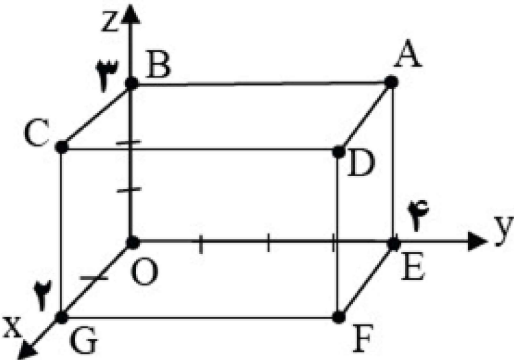
کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:
ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید				
۱	هندسه 3 (فصل 3) سوال ۴۲ اگر سه بردار $\vec{a} = (m, -1, 1)$، $\vec{b} = (1, -1, 1)$ و $\vec{c} = (1, m, -1)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۲	اگر $\vec{a} = (-2, 0, 1)$ و $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} - \vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۳	اگر $\vec{a} = (2, -1, 1)$، $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ بر امتداد بردار $2\vec{c} - \vec{b}$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۴	مقدار m را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (m, 0, 2)$ و $\vec{b} = (2, -2, 0)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۵	جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید. حاصل $\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k})$ برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نقطه $(-2, 3, -1)$ در ناحیه ششم مختصاتی قرار دارد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				
۷	بردار $\vec{a} = (4, -4, 2)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۳ را طوری بیابید که $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲				

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

۸	زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۹	بردارهای $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$، $\vec{b} = (0, 1, 1)$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ بر سه یال یک متوازی السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۰	نشان دهید: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b}$ است.  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۱	نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(1, 0, 1)$ در فضا مفروض اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۲	کدامیک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست. $\sqrt{3}\vec{a} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b}\right)$ (۱) $\vec{a} \times \vec{b}$ (۲) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ (۳) $\vec{b} \times \frac{\sqrt{2}}{5}\vec{a}$ (۴) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۳	زاویه بین بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدامیک از موارد زیر حاصل ضرب داخلی آنها بیشتری مقدار را دارد. $\theta = 0$ (۱) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (۲) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (۳) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (۴) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. حاصل عبارت $\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$ برابر صفر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۵	در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ خطی موازی محور است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۶	شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $y^2 + x \leq 0, x > -2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۷	سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0, 2, 1)$ را در نظر بگیرید: الف) طول بردار $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید. ب) مساحت متوازی الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b} + \vec{c}$ ایجاد می شود را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۸	ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۱۹	اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, n)$ و $\vec{b} = (1, 0, -1)$ برابر با 135° درجه باشد، مقدار n را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۰	شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $y < -x^2 + 1, -2 < y \leq -1$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۱	معادله صفحه ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A = (0, 0, 3)$ عمود باشد، به صورت است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۲	حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a} = (1, 0, -1)$ و $\vec{b} = (0, 2, 2)$ و $\vec{c} = (2, -3, 0)$ تولید می شود. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۳	اگر $\vec{a} = 3$ و $\vec{b} = 5$ و حاصل ضرب داخلی دو بردار 10 باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می شود چقدر است؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۴	مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = (2, m, -1)$ و $\vec{b} = (m+1, 3, 2)$ بر هم عمود باشند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۵	طول بردار $\vec{a} = (0, -3, 4)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۶	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $y = x^2, -1 < x \leq 2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۲۷	اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$ آنگاه $ \vec{b} = r \vec{a} $ (درست - نادرست)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۸	در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، معادله محور است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۹	برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۰	اگر $A = (2, -1, 3)$ و $B = (3, 1, 4)$ و $C = (-1, 1, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۱	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $ \vec{a} = 6$ و $ \vec{b} = 4$ و زاویه بین آن‌ها 30° درجه است. مقدار عبارت $ \vec{a} \times \vec{b} $ را محاسبه کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۲	سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0, 2, 1)$ در نظر بگیرید: (الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد $\cos \theta$ را بیابید. (ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۳	با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. $x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ (ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید. (پ) مختصات نقطه D را بنویسید. (ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه XOZ باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.	
۳۴	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 2$ را رسم کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۳۵	درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید. - برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{0}$ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۶	عبارت زیر را کامل کنید. - اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده توسط سه بردار برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۷	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $2\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۸	اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳۹	بردار عمود بر دو بردار $\vec{a} = (3, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, 2, -1)$ بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۴۰	اگر $\vec{a} = 10$ و $\vec{b} = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $\vec{a} \times \vec{b}$ را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۴۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A_{n \times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^T - A = I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I - A)$ است. ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O, 2r)$ است. پ) بردار $\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$، یک بردار یکه است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۴۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2k-1 & 2 \end{bmatrix}$، مقدار k برابر است. ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل است. پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$V = 0 \Rightarrow \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۱

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{j} = (-2, -1, 1), \vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}, \left| \vec{u} \times \vec{b} \right| = \sqrt{35}$$

۲

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (ص ۷۵ و ۸۴)}$$

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (1, 1, 1)$$

۳

$$\vec{v} = 2\vec{c} - \vec{b} = (3, -4, 0) \Rightarrow \left| \vec{v} \right| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left| \vec{v} \right|} \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, 0 \right) \text{ (ص ۷۵ و ۸۴)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \theta \Rightarrow 2m = (\sqrt{m^2 + 4})(2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow 4m^2 = 2m^2 + 8$$

۴

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 & \text{ق ق} \\ m = -2 & \text{غ ق} \end{cases} \text{ (ص ۷۸)}$$

۵ صفر (ص ۸۲)

۶ درست (ص ۶۴)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (4k, -4k, 4k)$$

۷

$$\left| \vec{b} \right| = 4 \left| k \right| = 12 \Rightarrow k = \pm 3 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow \vec{b} = (-12, 12, -12) \text{ (ص ۸۲)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \theta \Rightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ (ص ۷۸)}$$

۸

۹ حجم متوازی السطوح برابر با حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی السطوح برابر ۲ است. $\left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| (1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1) \right| = 2$

مساحت قاعده این متوازی السطوح که توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود برابر با: $\left| \vec{b} \times \vec{c} \right| = \sqrt{3}$ است.

$$h = \frac{\left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right|}{\left| \vec{b} \times \vec{c} \right|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه:

۱۰ روش اول: بردار $\vec{a}'$ با بردار $\vec{b}$ موازی است، $\vec{a}' = k\vec{b}$ $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$ (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم الزاویه، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را θ می‌نامیم

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

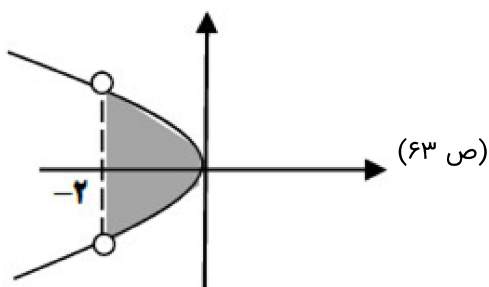
۱۱ مختصات نقطه $A(0, 0, 3)$ ، مختصات وسط AB برابر با $M\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$ و فاصله تا مبدأ مختصات $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است. (ص ۶۶)

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (ص ۸۱ و ۸۲)

۱۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۸۰)

۱۴ درست (ص ۸۱)

۱۵ zها (ص ۶۷)



۱۶

الف) $2\vec{b} = (2, 0, 2)$, $|2\vec{b} - \vec{c}| = |(2, -2, 1)| = 3$ (ص ۷۶)

ب) $\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 2)$ (ص ۸۱)

$S = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |(8, -5, 1)| = 3\sqrt{10}$

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$\vec{a} = r \vec{b}$$

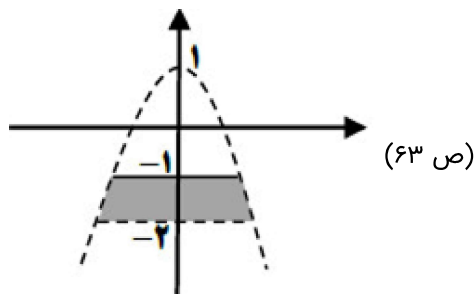
۱۸

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{r |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a} \text{ (ص ۸۰)}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4 + 1 + n^2}} \Rightarrow \frac{n - 2}{\sqrt{n^2 + 5}} = 1$$

۱۹

$$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \text{ (ص ۷۸)}$$



۲۰

$$z = 3 \text{ (ص ۶۸)}$$

۲۱

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = (6, 4, -4) \text{ (ص ۸۳)}$$

۲۲

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = |(1, 0, 1) \cdot (6, 4, -4)| = 10$$

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right| = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 10 = 3 \times 5 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۲۳

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 5\sqrt{5} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ (ص ۷۹)}$$

۲۴

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \text{ (ص ۷۳)}$$

۲۵

رسم نمودار (به طوری که نقطه توپیر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)

۲۶

درست (ص ۷۵)

۲۷

عرض ها یا محور yها (ص ۶۷)

۲۸

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (ص ۷۹)}$$

۲۹

$$\vec{AB} = (1, 2, 1), \vec{AC} = (-3, 2, -3)$$

۳۰

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-8, 0, 8), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ = 2(4)\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ (ص ۸۱)}$$

۳۱

$$\text{الف) } \vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, 0, 1)$$

۳۲

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \text{ (ص ۷۸)}$$

$$\text{ب) } \vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0) \text{ (ص ۷۹)}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \text{ (ب)}$$

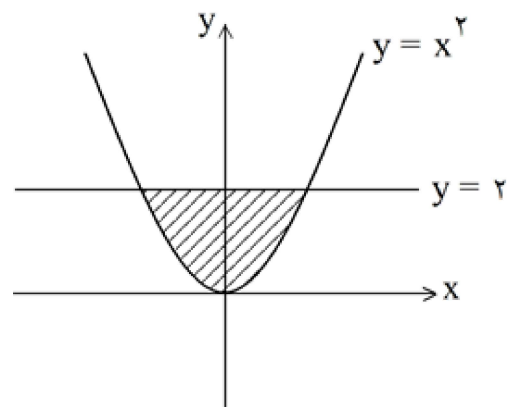
(ت) $y = 2$ (ص ۶۸)

۳۳ الف) CDFG

پ) $D(2, 4, 3)$

۳۴ رسم نمودار (ص ۵۵)

$y = x^2$ نمودار یک سهمی است و $y \geq x^2$ داخل این سهمی است و $y \leq 2$ نقاط زیر خط $y = 2$ هستند، پس $x^2 \leq y \leq 2$ ناحیه هاشورخورده می‌باشد.



$$\text{۳۵ نادرست، } \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \text{ (ص ۷۹)}$$

۳۶ صفر (ص ۸۴)

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2} \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{2} \vec{a} \times \vec{a} + \sqrt{2} \vec{a} \times \vec{b} \right| \quad (\text{ص } ۸۴)$$

۳۷

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| 0 + \sqrt{2} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \left| \sin \theta \right| = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 1, 2) \quad (\text{ص } ۸۴)$$

۳۸

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left| \vec{d} \right|^2} \vec{d} = \frac{(-2 - 3 + 8)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} (-2, 1, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ص } ۸۴)$$

۳۹

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (-3, 5, 7)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \theta \Rightarrow 12 = 10 \times 2 \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\text{ص } ۸۴)$$

۴۰

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = \frac{4}{5} \quad (\theta \text{ حاده است})$$

$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \sin \theta = 2 \times 10 \times \frac{4}{5} = 16$$

پ) درست (ص ۷۵)

ب) درست (ص ۳۹)

الف) نادرست (ص ۲۲)

۴۱

الف) $k = \frac{1}{2}$ (ص ۱۲)

۴۲

ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)

پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)

۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴